

Primož Peterlin

Vaje iz predmetov

**Zagotavljanje in preverjanje kakovosti  
v radioterapevtski tehnologiji**

ter

**Uporabna dozimetrija v radioterapiji**

Ljubljana 2023

Naslov: Vaje iz predmetov Zagotavljanje in preverjanje  
kakovosti v radioterapevtski tehnologiji ter  
Uporabna dozimetrija v radioterapiji

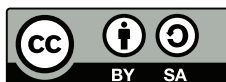
Avtor: Primož Peterlin

Oprema in postavitve: Primož Peterlin

Elektronska izdaja

© Primož Peterlin, 2017, 2023

To delo je na voljo pod pogoji slovenske licence Creative Commons 2.5 (priznanje avtorstva, deljenje pod enakimi pogoji). V skladu s to licenco je dovoljeno vsakomur delo predelovati, razmnoževati, distribuirati, javno priobčevati in dajati v najem pod pogojem, da se jasno in vidno navede avtorja in naslov tega dela ter da se v primeru spremembe, preoblikovanja ali uporabe tega dela v svojem delu tudi izvedeno delo distribuira pod enakimi pogoji.



# Kazalo

<b>1</b>	<b>Merjenje hitrosti doze fotonskega sevanja</b>	<b>3</b>
1.1	Absorbirana doza . . . . .	3
1.2	Monitorska enota . . . . .	3
1.3	Posredno merjenje doze z ionizacijsko celico . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Analiza negotovosti meritve absorbirane doze</b>	<b>6</b>
2.1	Modeliranje meritve . . . . .	6
2.2	Zgled: meritev absorbirane doze . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Preverjanje odziva ionizacijskih celic s Sr-90</b>	<b>10</b>
3.1	Radioaktivni razpad . . . . .	10
3.2	Aktivnost . . . . .	10
3.3	Preverjanje konstantnosti z izvorom Sr-90 . . . . .	11
3.4	Zgledi . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Individualne zaščite in prepuščeno sevanje</b>	<b>13</b>
4.1	Analiza merskih podatkov . . . . .	14
4.2	Metoda najmanjših kvadratov . . . . .	16
4.3	Koeficient korelacije . . . . .	17
4.4	Zgledi . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Recipročni kvadratni zakon</b>	<b>19</b>
5.1	Analiza merskih podatkov . . . . .	20
<b>6</b>	<b>Debelina zaščitnega zidu</b>	<b>22</b>
6.1	Absorpcija v dvoplastnem sredstvu . . . . .	22
6.2	Absorpcija divergentnega snopa . . . . .	23
<b>7</b>	<b>Mehanski izocenter</b>	<b>26</b>
<b>8</b>	<b>Sevalni izocenter</b>	<b>27</b>

## Predgovor k dopoljnjeni izdaji

Knjigo B. Casarja Praktikum iz radioterapevtske fizike poleg študentov radiološke tehnologije uporabljajo tudi študenti medicinske fizike pri predmetu Eksperimentalna medicinska fizika. Predvsem zanje sem dodal še poglavje o analizi negotovosti, kjer na primeru meritve absorbirane doze pokažemo določanje negotovosti meritve. Postopek je seveda uporaben širše. Poleg tega so v dopoljnjeni izdaji popravljene še najdene tipkarske napake.

Primož Peterlin, november 2023

## Predgovor

Ti zapiski so nastali kot pomoč študentom pri izvedbi vaj iz predmetov Zagotavljanje in preverjanje kakovosti v radioterapevtski tehnologiji ter Uporabna dozimetrija v radioterapiji v študijskih letih 2014/15 in 2017/18 ter predstavljajo dopolnilno gradivo k predavanjem doc.dr. Žontarja ter k učbeniku B. Casar (2015): Praktikum iz radioterapevtske fizike. Ljubljana: Zdravstvena fakulteta. ISBN 978-961-6808-58-3.

Omenjeni učbenik vsebuje vse potrebne podatke za izvedbo vaj, ti zapiski pa tam podano informacijo dopolnjujejo na različne načine; pri nekaterih vajah podam nekaj več teorijskega ozadja, spet drugod – posebej v primerih, ko meritvam sledi še zahtevnejša obdelava meritev – pa podajam podrobnejša navodila za obdelavo meritev. Rezultata namreč pogosto ne preberemo neposredno z instrumenta, ampak iz izmerjenih podatkov šele izračunamo vrednosti, ki nas zanimajo.

Poglavja ne sledijo povsem poglavjem v zgoraj omenjenem Praktikumumu. Razlogov je več. Prvič, zaradi omejenega časa je v kurikulumu za študente radiološke tehnologije na Zdravstveni fakulteti nekaj vaj iz Praktikumuma izpuščenih. Drugič, čeprav je se izvedba dveh vaj iz debeline zaščitnega zidu razlikuje (8. in 9. vaja v Praktikumumu), so osnove skupne, zato ju tu ne ločujem. In tretjič, pri nekaterih preprostih vajah nisem čutil potrebe, da bi predavanjem in navodilom v Praktikumumu karkoli dodajal.

Gradivo je na voljo pod odprtokodnim dovoljenjem za uporabo in razširjanje Creative Commons z namenom, da vzpodbudi nastanek še več odprtokodnega gradiva. Vesel bom popravkov in predlogov zaboljšave.

Primož Peterlin, december 2017

# 1 Merjenje hitrosti doze fotonskega sevanja

## 1.1 Absorbirana doza

Absorbirana doza – žargonsko pogosto kar *doza* – je energija na enoto mase, ki jo ionizirajoče sevanje preda snovi ob prehodu skozi snov:

$$D = \frac{dE}{dm}. \quad (1.1)$$

Pri tem je  $dE$  povprečna energija, ki jo sevanje preda prostorninskemu elementu snovi,  $dm$  pa masa tega prostorninskega elementa.

Enota za absorbirano dozo je 1 Gy (gray), kar je enako 1 J/kg.

Absorbirana energija se prek ionizacije in ekscitacije pretvori v notranjo energijo, kar privede do tega, da se obsevana snov segreje. Zaradi velike specifične toplote vode pa se temperatura le neznatno poveša, kar lahko ocenimo iz enačbe

$$Q = m c \Delta T. \quad (1.2)$$

Pri tem je  $Q$  dovedena toplota,  $m$  masa snovi,  $c$  specifična toplota (za vodo velja  $c = 4200 \text{ J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ ). Liter (ali kilogram) vode, ki prejme absorbirano dozo 1 Gy, se torej segreje za približno eno štiridesetino stopinje. Takšno temperaturno razliko lahko zaznamo v specializiranih laboratorijih, za praktično klinično delo pa je premajhna, zato absorbirano dozo merimo posredno.

Hitrost doze je spreminjanje absorbirane doze s časom, torej kako hitro absorbirana doza narašča s časom:

$$\dot{D} = \frac{dD}{dt}. \quad (1.3)$$

## 1.2 Monitorska enota

V času kobaltnih obsevalnikov je bilo moč hitrost absorbirane doze v tarči izračunati iz aktivnosti vira, razdalje med virom in tarčo ter debeline tkiva nad tarčo. Aktivnost kobaltnega vira je bila tekom posameznega obsevanja praktično konstantna, na daljši rok pa je upadala skladno z razpolovnim časom za Co-60 (5,27 let).

Linearni pospeševalniki, po drugi strani, ne sevajo kontinuirano, ampak v pulzih. Tipične vrednosti so 100–400 pulzov na sekundo in širina pulzov 1–10  $\mu\text{s}$ . Linearni pospeševalnik Varian 2100C/D na primer uporablja pulze širine 5  $\mu\text{s}$  na vsakih 5 ms.

V glavi linearne pospeševalnika je v fotonskem/elektronskem snopu monitorska ionizacijska celica, ki kontinuirano meri “dozo” in glede na nastavljene parametre za hitrost doze odpre ali zapre elektronski top.

Monitorska enota (angl. monitor unit, MU) je v zvezi z dozo; običajna kalibracija je, da 1 MU ustreza dozi 1 cGy v globini 10 cm.

### 1.3 Posredno merjenje doze z ionizacijsko celico

Namesto kalorimetričnega merjenja doze se v klinični praksi najpogosteje uporablja posredno merjenje absorbirane doze prek električnega naboja, ki ga prek ionizacije v snovi ustvari sevanje.

Pri absolutni dozimetriji izmerjeni električni naboj neposredno preračunamo v absorbirano dozo. V rabi je več protokolov za meritev in pretvorbo. V Evropi se uporablja predvsem IAEA TRS-398 (IAEA, 2000), ki je nadomestil starejši TRS-277, v ZDA pa AAPM TG-51, ki je nasledil starejši protokol AAPM TG-21.

Električni naboj merimo v vodnem fantomu v globini 10 cm, pri čemer je razdalja med izviro sevanja in gladino vode (source-surface distance, SSD) enaka 90 cm. Obsevalno polje je kvadratno in veliko  $10 \times 10 \text{ cm}^2$  v ravnini izocentra. Za fotone se uporablja cilindrična ionizacijska celica tipa Farmer, meri se s klinično relevantno hitrostjo doze (npr. 300 MU/min).

TRS-398 uporablja za preračun električnega naboja v absorbirano dozo izraz:

$$D_{w,Q}(z_{\text{ref}}) = M_Q N_{D,w,Q_0} k_{Q,Q_0}. \quad (1.4)$$

Pri tem je  $D_{w,Q}(z_{\text{ref}})$  absorbirana doza  $D$  v vodi (indeks  $w$ ), v referenčni globini  $z_{\text{ref}}$ , za sevanje s kakovostjo  $Q$ . Kakovost sevanja  $Q$  je parameter, ki povzame energijski spekter ionizirajočega sevanja.

Faktor  $N_{D,w,Q_0}$  je kalibracijski faktor za celico, ki ga poda izdelovalec ionizacijske celice. Izmerjen je v referenčnem laboratoriju v sevalnem snopu vira  $^{60}\text{Co}$  (kakovost  $Q_0$ ). Razliko med kakovostjo sevanja kliničnega vira  $Q$  in kakovostjo sevanja referenčnega vira  $Q_0$  upoštevamo s korekcijskim faktorjem  $k_{Q,Q_0}$ .

$M_Q$  je korigirana vrednost električnega naboja, ki jo izračunamo iz nekorigiranega odčitka električnega naboja  $M_e$ :

$$M_Q = M_e k_{T,p} k_{\text{elec}} k_{\text{pol}} k_s. \quad (1.5)$$

Pri tem je  $k_{T,p}$  popravek zaradi spremenjene temperature in tlaka glede na referenčne pogoje,  $k_{\text{elec}}$  korekcijski faktor elektrometra,  $k_{\text{pol}}$  popravek zaradi polaritete in  $k_s$  rekombinacijski popravek.

Standardni pogoji so  $T_0 = 293,2 \text{ K}$  ( $20 \text{ }^\circ\text{C}$ ),  $p_0 = 1013,2 \text{ hPa}$  in relativna vlažnost 20–80%. Popravek  $k_{T,p}$  izračunamo iz splošne plinske enačbe in je enak:

$$k_{T,p} = \frac{T}{T_0} \frac{p_0}{p}. \quad (1.6)$$

Polaritetni popravek upošteva spremembo odčitka, če zamenjamo polariteti elektrod:

$$k_{\text{pol}} = \frac{|M_+| + |M_-|}{2M}. \quad (1.7)$$

Pri tem je  $|M_+|$  odčitek, kadar je srednja elektroda priključena kot anoda,  $|M_-|$  odčitek, kadar je srednja elektroda priključena kot katoda, in  $M$  odčitek, kadar je srednja elektroda priključena tako, kot se običajno uporablja.

Rekombinacijski popravek  $k_s$  upošteva odvisnost odčitka od električne napetosti med elektrodama:

$$k_s = a_0 + a_1 \left( \frac{M_1}{M_2} \right) + a_2 \left( \frac{M_1}{M_2} \right)^2 . \quad (1.8)$$

Pri tem sta  $M_1$  in  $M_2$  odčitka pri običajni in polovični napetosti med elektrodama,  $a_0$ ,  $a_1$  in  $a_2$  pa koeficienti, ki jih preberemo iz tabele. Namesto z običajno in polovično napetostjo (npr. 400 V in 200 V) lahko delamo tudi z običajno in četrtnsko napetostjo (400 V in 100 V) in pri tem upoštevamo prave koeficiente za to možnost.

Popravek  $k_{\text{elec}}$  upošteva različno občutljivost elektrometrov; ker sta v našem primeru bila ionizacijska celica in elektrometer kalibrirana skupaj, je ta koeficient enak kar 1.

## 2 Analiza negotovosti meritve absorbirane doze

Pri tej računski vaji, ki se navezuje na prejšnjo, bomo ocenili negotovost izračunane absolutne absorbirane doze. Naslonili se bomo na metodologijo Vodila za izražanje merilne negotovosti (Guide to the Expression of Uncertainty of Measurement – GUM; JCGM, 2008).

### 2.1 Modeliranje meritve

Merjena količina  $Y$  (npr. v našem primeru absorbirana doza) dostikrat ni neposredno merjena, ampak je določena iz drugih količin  $X_i$

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N). \quad (2.1)$$

Običajno imamo na razpolago le ocene  $x_i$  za količine  $X_i$ , na osnovi katerih lahko dobimo oceno  $y$  količine  $Y$ :

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N). \quad (2.2)$$

Ocenjene vrednosti vhodnih podatkov  $x_i$  imajo svoje negotovosti. Količine lahko razvrstimo v dve skupini:

1. Količine, katerih negotovost lahko neposredno določimo, npr. s ponavljanjem meritve. To imenujemo negotovost tipa A.
2. Količine, katerih negotovosti ne moremo določiti neposredno, ampak jo pridobimo iz zunanjih virov (npr. certifikata). Te imenujemo negotovost tipa B.

**Standardna negotovost tipa A.** Kadar imamo za neko količino na voljo več meritev, lahko izračunamo povprečje in standardni odklon:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^N x_i, \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (2.3)$$

Zaupanje v tako izračunano povprečje izraža *standardna napaka povprečja*:

$$\sigma_n = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (2.4)$$

Prave vrednosti merjene količine  $X$  sicer ne poznamo, poznamo le njeno oceno  $\bar{x}$ , v primeru normalne porazdelitve pa se  $X$  z 68% verjetnosti nahaja na intervalu  $[\bar{x} - \sigma_n, \bar{x} + \sigma_n]$ . Razširitev intervala poveča verjetnost: na intervalu  $[\bar{x} - 2\sigma_n, \bar{x} + 2\sigma_n]$  bomo vrednost  $X$  našli z 95% verjetnosti, na intervalu  $[\bar{x} - 3\sigma_n, \bar{x} + 3\sigma_n]$  pa z več kot 99% verjetnosti. *Standardna negotovost tipa A* je kar enaka standardni napaki povprečja:

$$u(x) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (2.5)$$



Včasih se namesto standardne navaja *razširjena napaka povprečja*, ki ustreza širšemu intervalu. V tem primeru mora biti navedeno tudi, kako širok je interval;  $k = 2$  tako npr. označuje interval, širok  $\pm 2\sigma_n$ . Enakovredna oznaka je stopnja zaupanja, npr. 90%, 95% ali 99%.

**Standardna negotovost tipa B.** Pri negotovosti tipa B se moramo zanesti na zunanji vir in na uporabljeni način poročanja negotovosti. Lahko je podana standardna negotovost, kot v zgornjem primeru, lahko pa je podan interval, znotraj katerega se gotovo nahaja izmerjena vrednost, npr.  $x \pm a$ . Če nimamo na voljo drugačnih podatkov, v tem primeru privzamemo, da je verjetnostna porazdelitev znotraj tega intervala enakomerna, izven intervala pa je verjetnost enaka nič. Standardna negotovost je v tem primeru enaka

$$u(x) = \frac{a}{\sqrt{3}}. \quad (2.6)$$

**Sestavljena negotovost.** Kadar je rezultat odvisen od več kot enega vhodnega podatka, je tudi skupna negotovost sestavljena iz prispevkov posameznih vhodnih negotovosti. Tu se omejimo na primer, ko vhodnih vrednosti med seboj niso korelirane. Sestavljena negotovost je enaka kvadratnemu korenu utežene vsote kvadratov posameznih standardnih negotovosti:

$$u_c = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)}. \quad (2.7)$$

Pri tem je  $u(x_i)$  standardna negotovost tipa A ali B, členu  $(\partial f)/(\partial x_i)$  pa pravimo *koeficient občutljivost*.

## 2.2 Zgled: meritev absorbirane doze

Za zgled bomo analizirali meritev absorbirane doze po protokolu IAEA TRS-398:

$$D_w = (M_e - M_0) N_{D,w,Q_0} k_{Q,Q_0} k_{T,p} k_s k_{\text{pol}}.$$

Izraz poznamo že od prej (en. 1.4, 1.5), le da smo tu eksplicitno zapisali še vrednost meritve ozadja  $M_0$ . Podatki, ki so nam na voljo, so:

1. 6 MV žarek,  $k_{Q,Q_0} = 0.676$
2. meritve naboja:  $M_e = \{10.02, 10.01, 9.99, 10.04, 10.05, 10.08, 10.18, 9.91, 9.87, 10.01\}$  nC
3. ozadje:  $M_0 = 0.001 \pm 0.001$  nC
4. kalibracijski faktor celice:  $N_{D,w,Q_0} = 5.772 \cdot 10^7$  Gy/C,  $u = 2.2\%$ , ( $k = 2$ )
5.  $T = 21 \pm 0.2$  °C,  $p = 997 \pm 5$  hPa

6.  $k_s = 1.004$ ,  $u = 0.16\%$

7.  $k_{\text{pol}} = 1.001$ ,  $u = 0.14\%$

**Meritve  $M_e$ .** Najprej se lotimo meritev naboja,  $M = M_e - M_0$ . Sestavljena negotovost je enaka:

$$u_c(M) = \sqrt{\left(\frac{\partial M}{\partial M_e}\right)^2 u^2(M_e) + \left(\frac{\partial M}{\partial M_0}\right)^2 u^2(M_0)} = \sqrt{u^2(M_e) + u^2(M_0)}. \quad (2.8)$$

Tu je  $u(M_e)$  negotovost tipa A:

$$u(M_e) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^N (M_e - \bar{M}_e)^2} = 0.02709 \text{ nC}. \quad (2.9)$$

$u(M_0)$  je negotovost tipa B; privzamemo, da je verjetnost enakomerno porazdeljena po intervalu  $[0.001 - 0.001 \text{ nC}, 0.001 + 0.001 \text{ nC}]$ , zato je standardna negotovost enaka:

$$u(M_0) = \frac{0.001 \text{ nC}}{\sqrt{3}} = 0.00058 \text{ nC}. \quad (2.10)$$

Sestavljena negotovost je končno enaka

$$u_c(M) = \sqrt{u^2(M_e) + u^2(M_0)} = 0.02709 \text{ nC}. \quad (2.11)$$

**Koeficient  $k_{T,p}$ .** Podobno se lahko lotimo tudi sestavljene negotovosti koeficienta  $k_{T,p}$ :

$$\begin{aligned} u_c(k_{T,p}) &= \sqrt{\left(\frac{\partial k_{T,p}}{\partial T}\right)^2 u^2(T) + \left(\frac{\partial k_{T,p}}{\partial p}\right)^2 u^2(p)} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{T_0} \frac{p_0}{p}\right)^2 u^2(T) + \left(-\frac{T}{T_0} \frac{p_0}{p^2}\right)^2 u^2(p)} \\ &= 0.00298. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Upoštevali smo  $u(T) = 0.2 \text{ }^\circ\text{C}/\sqrt{3}$  in  $u(p) = 5 \text{ hPa}/\sqrt{3}$ .

**Koeficient  $N_{D,w,Q_0}$ .** Podano imamo negotovost  $u = 2.2\%$  ob podatku  $k = 2$ , kar pomeni, da gre za razširjeno negotovost, ki z intervalom zajema  $\pm 2$  širini standardnega odklona. Relativno standardno negotovost dobimo, če razširjeno negotovost delimo s faktorjem  $k$ . Standardna negotovost je tedaj:

$$u(N_{D,w,Q_0}) = 0,011 \cdot 5.772 \cdot 10^7 \text{ Gy/C} = 6.349 \cdot 10^5 \text{ Gy/C}. \quad (2.13)$$

**Koeficient  $k_{Q,Q_0}$ .** Analiza negotovosti koeficienta  $k_{Q,Q_0}$  presega obseg teh navodil. Tabela D2.1 v navodilih (Casar, 2015) tabelira vrednost funkcije  $k_{Q,Q_0}(\text{TPR}_{20,10}) = [1 - \exp((a - 0.57)/b)]/[1 - \exp((a - \text{TPR}_{20,10}))/b]$ , pri čemer sta parametra  $a$  in  $b$  pridobljena s postopkom najboljšega prilaganja krivulje merskim ali modeliranim (Monte-Carlo) rezultatom za dani tip ionizacijske celice. Andreo *in sod.* (2020) ocenjujejo, da je standardna negotovost  $u(k_{Q,Q_0})$  okoli 0.6%, za tiste tipe ionizacijskih celic, pri katerih je bilo na voljo več merskih podatkov (IBA FC-65G; NE 2561/71; PTW30012, 30013, 31021) pa je standardna negotovost nižja:  $u(k_{Q,Q_0}) \approx 0.4\%$ .

**Koeficienta  $k_s$  in  $k_{\text{pol}}$ .** Tudi koeficient  $k_s$  je rezultat prilaganja krivulje meritvam in analiza negotovosti tega koeficienta presega obseg teh navodil. Namesto tega se bomo oprli na objavljeno študijo Castro *in sod.* (2008) in povzeli tam objavljene vrednosti:  $u(k_s) = 0.16\%$ ,  $u(k_{\text{pol}}) = 0.14\%$ .

**Proračun merskih negotovosti.** Ko imamo zbrane in izračunane vse vmesne podatke, lahko predstavimo komponente, ki prispevajo k sestavljeni negotovosti, v preglednici (Tabela 1). Takšni tabeli pravimo tudi proračun merskih negotovosti. Končni rezultat lahko zdaj zapišemo skupaj s standardno sestavljeno negotovostjo:  $D_w = 0.5869 \pm 0.0074$  Gy, ali  $D_w = 0.5869(1 \pm 1.2\%)$  Gy.

Tabela 1: Proračun merskih negotovosti pri izračunu absorbirane doze po protokolu IAEA TRS-398.

Količina	Enota	Vrednost	Koeficient občutljivosti	Tip negotovosti	Negotovost	Produkt
$X_i$		$x_i$	$c_i$	A/B	$u(x_i)$	$c_i u(x_i)$
$M$	C	$1.002 \cdot 10^{-8}$	$5.860 \cdot 10^7$	A	$2.17 \cdot 10^{-11}$	0.001587
$N_{D,w,Q_0}$	Gy/C	$5.77 \cdot 10^7$	$1,017 \cdot 10^{-8}$	B	$6.349 \cdot 10^5$	0.006456
$k_{T,p}$	1	1.0197	0.5756	B	0.0030	0.001715
$k_s$	1	1.0040	0.5846	B	0.0016	0.000939
$k_{\text{pol}}$	1	1.0010	0.5864	B	0.0014	0.000822
$k_{Q,Q_0}$	1	0.9907	0.5925	B	0.0040	0.002348
$D_w$	Gy	0.5869			$u_c = \sqrt{\sum_i c_i^2 u^2(x_i)}$	0.007363

### 3 Preverjanje odziva ionizacijskih celic s Sr-90

Izhodni tok – fotonski in elektronski – linearnega pospeševalnika redno preverjamo z ionizacijsko celico. Kadar pride do odstopanja, korigiramo izhodni tok pospeševalnika. Kako vemo, da je treba korigirati pospeševalnik, ne pa celice? Takšno zaupanje v ionizacijsko celico imamo, ker jo ločeno preverjamo – ne z drugim pospeševalnikom, ampak z radioaktivnim izvorom.

#### 3.1 Radioaktivni razpad

Atomska jedra z enakim številom protonov in različnim številom nevtronov imenujemo izotopi tega kemijskega elementa. Nekateri izotopi so nestabilni in spontano razpadajo, pri čemer jedra izsevajo delec  $\alpha$ ,  $\beta^-$ ,  $\beta^+$  ali sevanje  $\gamma$ .

Število jeder  $dN$ , ki razpade v izbranem (kratkem) časovnem intervalu  $dt$ , je sorazmerno skupnemu številu jeder  $N$ , dolžini časovnega intervala in sorazmernostni konstanti  $\lambda$ :

$$dN = -\lambda N dt. \quad (3.1)$$

Izraz (3.1) integriramo od izbranega začetnega časa  $t = 0$ , v katerem je začetno število jeder enako  $N_0 = N(t = 0)$ :

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = - \int_0^t \lambda dt. \quad (3.2)$$

Izračun integrala (3.2) je eksponentno pojemajoča funkcija:

$$N = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-t/\tau} = N_0 2^{-t/t_{1/2}}. \quad (3.3)$$

Vsi zgornji zapisi so enakovredni.  $\lambda$  je razpadna konstanta,  $\tau$  je razpadni čas,  $t_{1/2}$  pa razpolovni čas. Pomen slednjega si je najenostavneje predstavljati: to je čas, v katerem pade število jeder na polovico začetne vrednosti. Razpadni čas  $\tau$  je čas, v katerem pade število jeder na  $1/e$  začetne vrednosti, razpadna konstanta  $\lambda$  pa njegova recipročna vrednost.

Zvezo med konstantami najdemo, če enačbo (3.3) delimo z  $N_0$  in nato logaritmiramo:

$$\ln \left( \frac{N}{N_0} \right) = -\lambda t = -\frac{t}{\tau} = -\frac{t}{t_{1/2}} \ln 2.$$

Ko enačbo delimo s  $t$ , dobimo:

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}. \quad (3.4)$$

#### 3.2 Aktivnost

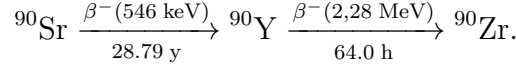
Aktivnost je število jeder radioaktivnega izotopa, ki razpade v danem časovnem intervalu:

$$A = -\frac{dN}{dt} = \frac{N_0}{\tau} e^{-t/\tau} \equiv A_0 e^{-t/\tau}. \quad (3.5)$$

Označili smo  $A_0 = N_0/\tau$ . Vidimo, da ne le število jeder, ampak tudi aktivnost vira s časom eksponentno pojema z enakim razpadnim časom.

### 3.3 Preverjanje konstantnosti z izvorom Sr-90

Vir  $^{90}\text{Sr}$ , ki ga uporabljamo za preverjanje konstantnosti odziva celic, je čisti  $\beta^-$  sevalec, ki z razpolovnim časom 28,79 let razpade v  $^{90}\text{Y}$ , ta pa nadalje z razpolovnim časom 64 ur v stabilni  $^{90}\text{Zr}$ :<sup>1</sup>



Razpad v verigi je v splošnem bolj zapleten kot enostavni razpad, ki smo ga obravnavali prej.

Če označimo tri člene v verigi ( $^{90}\text{Sr}$ ,  $^{90}\text{Y}$  in  $^{90}\text{Zr}$ ) z zaporednimi števkami 1, 2 in 3, lahko za prvi člen v verigi zapišemo:

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1. \quad (3.6)$$

Število jeder prvega elementa se zmanjšuje zaradi radioaktivnega razpada, rešitev je eksponentno pojevanje:

$$N_1 = N_1^0 e^{-\lambda_1 t} \quad A_1 = A_1^0 e^{-\lambda_1 t}. \quad (3.7)$$

Z  $N_1^0$  smo označili začetno število jeder prvega člena v verigi, z  $A_1^0 = \lambda_1 N_1^0$  pa njegovo začetno aktivnost.

Za drugi člen v verigi velja:

$$\frac{dN_2}{dt} = +\lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2. \quad (3.8)$$

Število jeder drugega člena se povečuje z razpadom starševskega izotopa, obenem pa tudi drugi člen nadalje razpada. Splošna rešitev za  $N_2$  je:

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1^0 (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) + N_2^0 e^{-\lambda_2 t}. \quad (3.9)$$

Aktivnost drugega člena verige ob pogoju  $N_2^0 = 0$  je enaka:

$$A_2 = \lambda_2 N_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} A_1^0 (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}). \quad (3.10)$$

Izraza (3.9) oziroma (3.10) se v nekaterih primerih poenostavita. En tak primer je, ko je razpadni čas prvega člena v verigi dosti daljši od razpadnega časa drugega člena:  $\tau_1 \gg \tau_2$ , oziroma  $\lambda_1 \ll \lambda_2$ .

V tem primeru velja  $\lambda_2/(\lambda_2 - \lambda_1) \approx 1$ ,  $e^{-\lambda_1 t} \approx 1$ , in izraz (3.10) se poenostavi:

$$A_2 \approx A_1^0 (1 - e^{-\lambda_2 t}).$$

V izrazu prepoznamo začetno naraščanje aktivnosti drugega člena v verigi ob predpostavki  $N_2^0 = 0$ .

<sup>1</sup>Podatki pridobljeni 2015-04-02 prek spletnega vmesnika NNDC iz zbirke Evaluated Nuclear Structure Data File (ENSDF) (Bhat, 1992).

Drugo limito dobimo za čase, dosti daljše od razpadnega časa drugega elementa v verigi,  $t \gg \tau_2$  (ne pa tudi daljši od razpadnega časa prvega člena). V tem primeru je drugi člen v oklepaju enak nič in nam ostane le prvi člen:

$$A_2 \approx A_1^0 e^{-\lambda_1 t} = A_1. \quad (3.11)$$

Aktivnost drugega člena v verigi je enaka aktivnosti prvega člena, saj je omejena z “dotokom”, torej razpadom prvega člena. Stanju, ko ostaja količina radioaktivnega izotopa konstantna, ker ga razpade ravno toliko, kot ga nastane, pravimo *sekularno ravnovesje*. Izmerjena aktivnost vira je enaka vsoti aktivnosti prvega in drugega člena.

### 3.4 Zgledi

Dne 15. 2. 2010 je bila izmerjena aktivnost vira enaka  $A_0 = 33,3$  MBq. Kolikšna je bila aktivnost tega vira 3. 4. 2015?

Razpolovni čas  $^{90}\text{Sr}$  je 28,79 let oziroma 10515,5 dni (vzamemo, da ima leto 365,25 dni). Razpadna konstanta je enaka

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = 6,592 \cdot 10^{-5} \text{ dan}^{-1}.$$

Med 15. 2. 2010 in 3. 4. 2015 je preteklo  $t = 1873$  dni. Odtod:

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t} = A_0 \cdot 0,8838 = 29,4 \text{ MBq}.$$

Merilo za aktivnost vira je korigiran naboj, ki ga izmerimo z ionizacijsko celico in elektrometrom. Če bi z isto ionizacijsko celico in istim elektrometrom v daljših časovnih razmakih večkrat merili aktivnost vira in dobljeni odčitek naboja korigirali za temperaturo in zračni tlak, bi ugotovili, da tudi ta s časom pada enako kot aktivnost. Drugi popravki (zaradi polaritete, rekombinacije itd.) na časovno odvisnost ne vplivajo, ker se s časom ne spreminjajo.

Za nekorigiran naboj to seveda ne velja. Če čas med zaporednimi meritvami ni predolg, lahko pri poznejši meritvi izmerimo celo višjo vrednost naboja. Zakaj? Razmislite, kako sprememba tlaka in temperature vplivata na izmerjeno vrednost.

## 4 Individualne zaščite in prepuščeno sevanje

Ob prehodu skozi snov se del sevanja v snovi absorbira, del pa ga snov prepusti. Če na tanko plast snovi debeline  $dz$  vpadla sevanje z intenziteto  $I$ , se del intenzitete sevanja  $dI$  v snovi absorbira, preostanek  $(I - dI)$  pa je prepuščen (slika 4.1). Za curek fotonov velja, da je del intenzitete sevanja, ki se absorbira, sorazmeren vpadli intenziteti  $I$  in debelini snovi  $dz$ :

$$dI = -\mu I dz. \quad (4.1)$$

Z  $\mu$  smo označili sorazmernostno konstanto, imenovano linearni oslabitveni (atenuacijski) koeficient.

Enačbo (4.1) integriramo:

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\mu \int_0^z dz. \quad (4.2)$$

Kot rezultat dobimo

$$\ln \left( \frac{I}{I_0} \right) = -\mu z,$$

oziroma, po antilogaritmiranju,

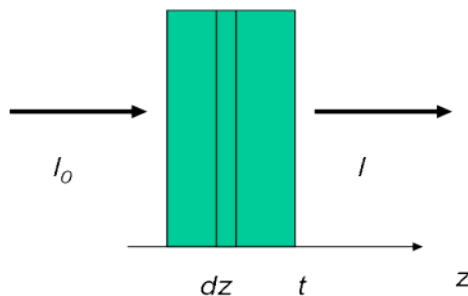
$$\frac{I}{I_0} = e^{-\mu z}. \quad (4.3)$$

Podobno kot v prejšnjem poglavju lahko tudi tu odvisnost (4.3) namesto z linearnim atenuacijskim koeficientom zapišemo z razpolovno debelino:

$$\frac{I}{I_0} = 2^{-z/z_{1/2}}. \quad (4.4)$$

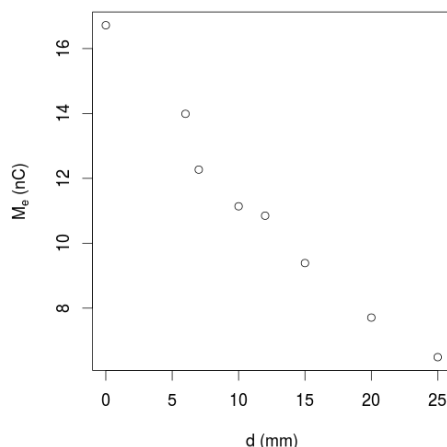
V angleško govoreči literaturi se za razpolovno debelino uporablja kratica HVL (angl. half-value layer). Zvezo med  $\mu$  in  $z_{1/2}$  dobimo, če logaritmiramo zvezo (4.4):

$$\ln \left( \frac{I}{I_0} \right) = -\mu z = -\frac{z}{z_{1/2}} \ln 2,$$



Slika 4.1: Absorpcija sevanja v snovi.

$d$ (mm)	$M_e$ (nC)
0	16,72
6	13,99
7	12,27
10	11,14
12	10,85
15	9,39
20	7,71
25	6,49



Slika 4.2: Podatki o sevanju, prepuščenem skozi zaščite različnih debelin.

in odtod:

$$\mu = \frac{\ln 2}{z_{1/2}}. \quad (4.5)$$

Tako linearni oslabitveni koeficient kot razpolovna debelina sta odvisna tako od snovi (absorberja) kot od kakovosti sevanja.

#### 4.1 Analiza merskih podatkov

Poskus izvedemo tako, da vedno izberemo enako dolg čas obsevanja (npr. 100 MU) in z elektrometrom merimo naboj, ki ga prepuščeno sevanje ustvari v ionizacijski celici. Denimo, da smo za 7 različnih debelin zaščite (in pa brez zaščite) izmerili prepuščeno sevanje. Zbrane podatke lahko tudi grafično predstavimo (slika 4.2).

Kako iz dobljenih meritev izračunamo linearni oslabitveni koeficient  $\mu$ ? Če absorpcijski zakon (4.3) logaritmujemo, dobimo enačbo premice:

$$\ln I = \ln I_0 - \mu z. \quad (4.6)$$

Tako preoblikovani podatki so na sliki 4.3.

Iz slike 4.3 je razvidno, da točke ležijo približno na premici. Iz enačbe (4.6) vidimo, da je strmina te premice ravno iskani linearni oslabitveni koeficient  $\mu$ .

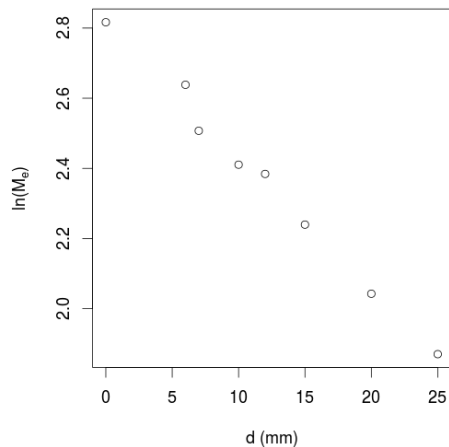
Kako določimo strmino oziroma smerni koeficient premice, če imamo na voljo merske točke? Ponekod se najde recept, da izberemo dve izmed merskih točk in iz teh dveh točk izračunamo smerni koeficient. Račun je resda preprost,  $k = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ , a žal je metoda zanič. Ni namreč vseeno, kateri dve točki na grafu si izberemo (slika 4.4) – izbira točk močno vpliva na rezultat.

Strmine premice torej ne določamo iz para merskih točk, ampak skušamo izbrati tako premico, ki se kar najbolj prilaga vsem merskim točkam. Zgled take premice je na sliki 4.5.

Obstaja več metod, kako poiskati premico, ki se kar najbolj prilaga merskim točkam. Ena taka metoda je *grafična*. Naše oko je precej dobro pri prepoznavanju vzorcev, in z

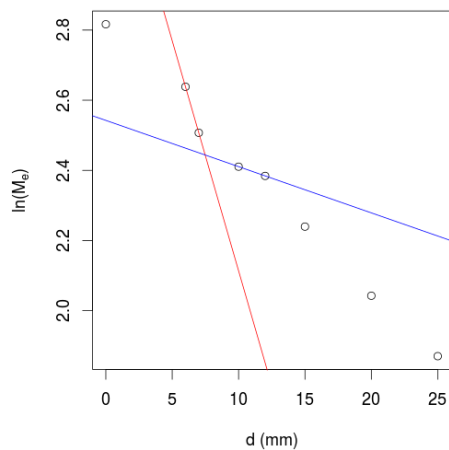


$d$ (mm)	$M_e$ (nC)	$\ln M_e$
0	16,72	2,82
6	13,99	2,64
7	12,27	2,51
10	11,14	2,41
12	10,85	2,38
15	9,39	2,24
20	7,71	2,04
25	6,49	1,87



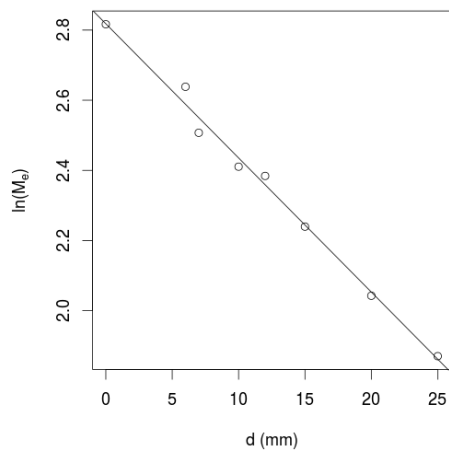
Slika 4.3: Linearizirani podatki o sevanju, prepuščenem skozi zaščite različnih debelin.

$d$ (mm)	$M_e$ (nC)	$\ln M_e$
0	16,72	2,82
6	13,99	2,64
7	12,27	2,51
10	11,14	2,41
12	10,85	2,38
15	9,39	2,24
20	7,71	2,04
25	6,49	1,87



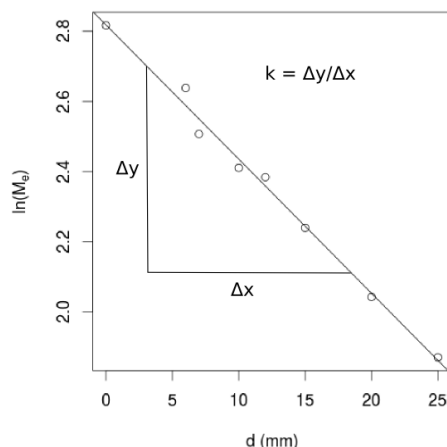
Slika 4.4: Strmine premice ne določamo iz parov točk.

$d$ (mm)	$M_e$ (nC)	$\ln M_e$
0	16,72	2,82
6	13,99	2,64
7	12,27	2,51
10	11,14	2,41
12	10,85	2,38
15	9,39	2,24
20	7,71	2,04
25	6,49	1,87



Slika 4.5: Premica, ki se najboljše prilega vsem merskim točkam.

$d$ (mm)	$M_e$ (nC)	$\ln M_e$
0	16,72	2,82
6	13,99	2,64
7	12,27	2,51
10	11,14	2,41
12	10,85	2,38
15	9,39	2,24
20	7,71	2,04
25	6,49	1,87



Slika 4.6: Grafična metoda iskanja premice, ki se najboljše prilega merskim točkam.

nekaj malega vaje lahko na ta način dobimo kar dobre rezultate. V tem primeru ravnamo tako:

1. Izračunamo logaritme vrednosti prepuščenega sevanja (odčitek z elektrometra)
2. Na milimetrski papir narišemo točke; koordinata  $x$  vsake točke je debelina zaščite, pri kateri smo merili, koordinata  $y$  pa logaritem odčitka z elektrometra
3. Na oko potegnemo premico, ki se kar najboljše prilega merskim točkam – pazimo denimo, da je približno enako točk nad in pod premico
4. Odčitamo smerni koeficient premice  $k = \Delta y / \Delta x$ , ki je v tem primeru kar enak linearnemu oslabitvenemu koeficientu  $\mu$

## 4.2 Metoda najmanjših kvadratov

Grafična metoda je imela svoje zlato obdobje v času, ko je bilo lažje najti milimetrski papir kot računalnik. Danes navadno premico, ki se najboljše prilega merskim točkam, določamo računsko.

Idelno bi morala zveza (4.6) veljati za vsako od merkih točk:

$$\ln I_1 = \ln I_0 - \mu z_1$$

$$\ln I_2 = \ln I_0 - \mu z_2$$

...

$$\ln I_n = \ln I_0 - \mu z_n$$

To seveda ne velja, saj vemo, da točke ne ležijo povsem na premici.

Zahtevo, da točke *čim bolje* ležijo na premici, lahko zapišemo tako:

$$\sum_{j=1}^n (\ln I_j - (\ln I_0 - \mu z_j))^2 = \min. \quad (4.7)$$

Z besedami: vzamemo razliko med izmerjeno vrednostjo prepuščenega sevanja ( $I_j$ ) in vrednostjo, ki bi sledila iz linearne odvisnosti ( $\ln I_0 - \mu z_j$ ); ker nas zanima velikost razlik med izmerjenimi in izračunanimi vrednostmi, razliko kvadriramo, in na koncu seštejemo za vse merske točke. Iščemo tako premico, pri kateri bo ta vsota kvadriranih vrednosti odstopanj merskih točk od premice najmanjša.

Minimum je eden od ekstremov, in ekstreme poiščemo z odvajanjem funkcije.

Oglejmo si primer, ko imamo  $n$  parov merskih točk  $(x_j, y_j)$ , skoznje pa bi radi potegnili premico  $y = ax + b$  tako, da se bo kar najboljše prilegala merskim točkam. To je enako iskanju minimuma izraza

$$F = \sum_{j=1}^n (y_j - (a + bx_j))^2. \quad (4.8)$$

Vsoto  $F$  odvajamo po  $a$  in  $b$ :

$$\frac{\partial F}{\partial a} = -2 \sum_{j=1}^n (y_j - (a + bx_j)) = 0 \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = -2 \sum_{j=1}^n (y_j - (a + bx_j)) x_j = 0 \quad (4.10)$$

Dobili smo sistem dveh enačb za dve spremenljivki ( $a$  in  $b$ ), ki ga lahko rešimo:

$$\sum_{j=1}^n y_j = a n + b \sum_{j=1}^n x_j \quad (4.11)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j y_j = a \sum_{j=1}^n x_j + b \sum_{j=1}^n x_j^2 \quad (4.12)$$

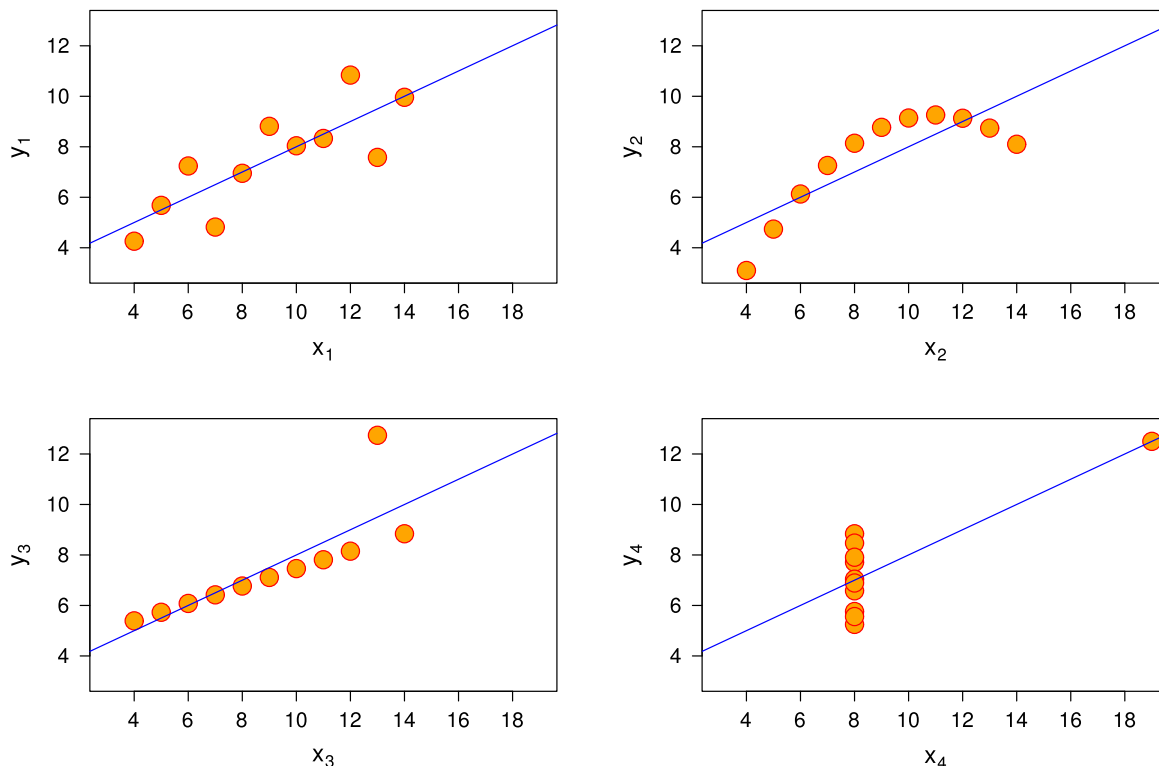
Pogost zapis rešitve je

$$\begin{aligned} b &= \frac{s_{xy}}{s_{xx}} & s_{xx} &= \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 & \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \\ a &= \bar{y} - b\bar{x} & s_{xy} &= \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y}) & \bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j \end{aligned}$$

### 4.3 Koeficient korelacije

Koeficient korelacije  $r^2$  je merilo za to, kako dobro se merske točke prilegajo premici. Koeficient korelacije lahko zapišemo v obliki:

$$r^2 = \frac{s_{xy}^2}{s_{xx}s_{yy}} \quad (4.13)$$



Slika 4.7: Štirje nabori točk z enakim koeficientom korelacije ( $\approx 0.816$ ) iz članka Anscombe (1973) (ilustracija: Schutz, CC BY-SA 3.0).

Pri tem so vsote  $s_{xx}$ ,  $s_{yx}$  in  $s_{yy}$  enake:

$$s_{xx} = \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 \quad s_{yy} = \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2 \quad s_{xy} = \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})$$

Koeficient korelacije ni nadomestilo za premislek o porazdelitvi merskih točk. V znanem primeru (Anscombe, 1973) vidimo, da imajo lahko zelo različne porazdelitve enako regresijsko premico in isti koeficient korelacije (slika 4.7).

#### 4.4 Zgledi

- Debelina, ki oslabi intenziteto fotonskega snopa za eno četrtno:

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\mu d} = \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 0,75 \quad d = \frac{-\ln(0,75)}{\mu}$$

- Debelina, ki prepusti 3% fotonskega snopa:

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\mu d} = 0,03 \quad d = \frac{-\ln(0,03)}{\mu}$$

## 5 Recipročni kvadratni zakon

Zamislimo si točkast izvor z dano aktivnostjo  $A$  v praznem prostoru, tako da ni absorpcije. Za poenostavitev predpostavimo, da je vir čisti  $\gamma$ -sevalec (kakršnih v naravi ni), ki ob vsakem razpadu izseva natanko en foton, in seva izotropno v vse smeri.

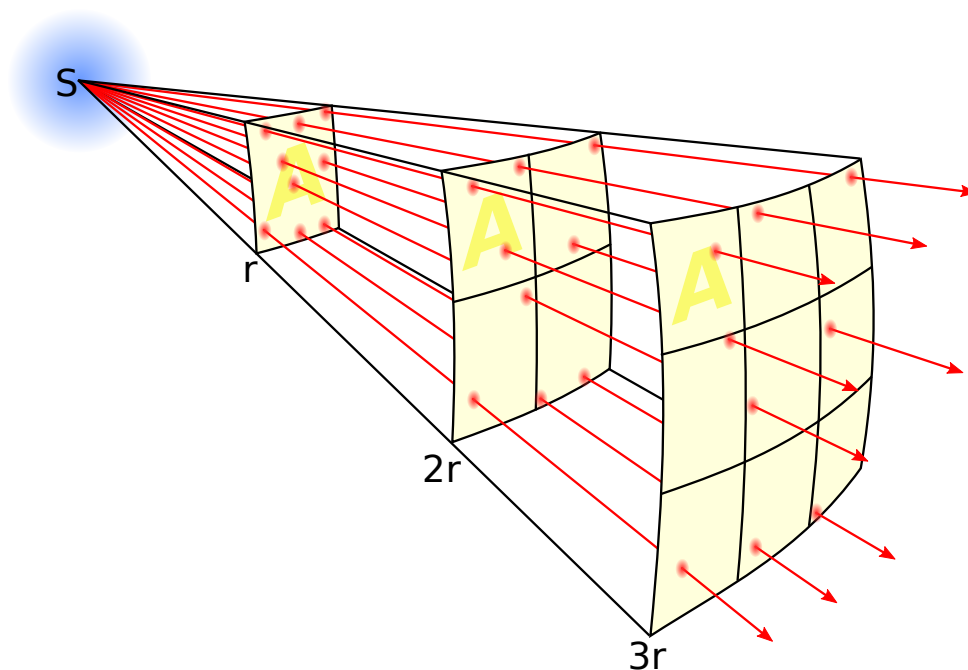
Gostota toka fotonov (ali hitrost fotonske fluence)  $\phi$  je tedaj enaka količniku med aktivnostjo in površino krogle z radijem  $r$  in središčem v izvoru:

$$\phi = \frac{A}{4\pi r^2}. \quad (5.1)$$

Če primerjamo gostoti toka fotonov na dveh različnih razdaljah:

$$\frac{\phi_2}{\phi_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2}. \quad (5.2)$$

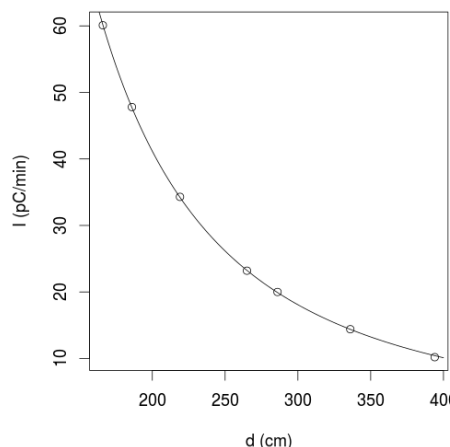
Če, denimo, razdaljo podvojimo ( $r_2 = 2r_1$ ), pade gostota toka fotonov na eno četrtnino ( $\phi_2 = \phi_1/4$ ). Zakon, ki opisuje pojemanje intenzitete okoli točkastega izvira, ponekod imenujejo tudi *recipročni kvadratni zakon* (slika 5.1).



Slika 5.1: Intenziteta pojema s kvadratom oddaljenosti od točkastega izvira (ilustracija: Borb, CC BY-SA 3.0).

Če recipročni kvadratni zakon (5.1) integriramo po času, dobimo na levi strane enačbe fotonsko fluenco  $\Phi = \int \phi dt$ , na desni pa v imenovalcu število razpadlih jeder oziroma

$d$ (cm)	$I$ (pC/min)
166	60,1
186	47,8
219	34,3
265	23,2
286	20,0
336	14,4
394	10,2



Slika 5.2: Odvisnost električnega toka skozi ionizacijsko celico v odvisnosti od razdalje med virom in ionizacijsko celico.

število izsevanih fotonov,  $N = \int A dt$ :

$$\Phi = \frac{N}{4\pi r^2}. \quad (5.3)$$

Elektrometer, ki ga uporabljamo pri tej vaji, lahko deluje na oba načina: lahko bo-disi prikazuje trenutni tok skozi ionizacijsko celico, ali pa ta tok integrira prek izbranega časovnega intervala (npr. eno ali dve minuti) in prikaže skupni naboj, ki je v tem času pretekkel prek ionizacijske celice.

## 5.1 Analiza merskih podatkov

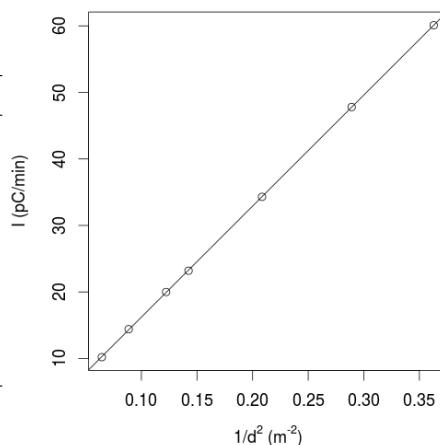
Za zgled vzemimo, da smo pri sedmih različnih oddaljenostih med izvorom in ionizacijsko celico izmerili tok skozi ionizacijsko celico. Meritve lahko predstavimo v tabeli ali z grafikonom (slika 5.2).

Dokazali bi radi, da v tem primeru velja recipročni kvadratni zakon. Z drugimi besedami povedano bi radi dokazali, da merske točke ležijo (znotraj eksperimentalne napake) na krivulji  $1/r^2$ .

Enako kot pri računanju smernega koeficienta premice iz para točk v 4. poglavju (slika 4.4) tudi zdaj ni dovolj, če iz množice izberemo dve točki in preverimo, ali velja zveza (5.2). Morda ravno za izbrani dve točki velja povsem točno. Bolj verjetno pa za izbrani dve točki ne velja povsem. Kakšno je naše merilo, da bomo presodili, ali vseeno velja dovolj dobro? In zakaj smo merili pri toliko različnih razdaljah, če bomo nazadnje vzeli le dve?

Po drugi strani pa smo v prejšnjem poglavju spoznali koeficient korelacije kot merilo tega, kako dobro se merske točke prilegajo premici. Metodo lahko uporabimo, če uspemo merske podatke preoblikovati tako, da bodo ležali na premici namesto na krivulji  $1/r^2$ .

$d$ (cm)	$1/d^2$ m <sup>-2</sup>	$I$ (pC/min)
166	0,363	60,1
186	0,289	47,8
219	0,208	34,3
265	0,142	23,2
286	0,122	20,0
336	0,0886	14,4
394	0,0644	10,2



Slika 5.3: Odvisnost električnega toka skozi ionizacijsko celico v odvisnosti od kvadrata recipročne razdalje med virom in ionizacijsko celico.

To lahko storimo, če namesto odvisnosti toka skozi ionizacijsko celico od razdalje med izviro in detektorjem, kot na sliki 5.2, rišemo odvisnosti toka skozi ionizacijsko celico od kvadrata recipročne razdalje med izviro in detektorjem (slika 5.3).

Še vedno ostane interpretacija vrednosti koeficienta korelacije, kjer pa se vendarle lahko opremo na ustaljeno statistično literaturo. Absolutne vrednosti koeficienta korelacije nad 0.8 se praviloma obravnavajo kot močna koreliranost.

## 6 Debelina zaščitnega zidu

V 4. poglavju smo obravnavali absorpcijo sevanja v snovi, v 5 poglavju pa geometrijsko divergenco žarkov, izvirajočih iz točkastega izvira. Oba pojava vodita do tega, da se gostota toka fotonov zmanjšuje z večanjem razdalje od izvora. Zgledi v prejšnjih dveh poglavjih so bili izbrani tako, da se je dalo enega od pojavov zanemariti – pri obravnavi absorpcije je bila debelina sredstva dovolj majhna, da divergenca ni bila pomembna, ob obravnavi divergenca pa smo lahko zanemarili absorpcijo žarkov  $\gamma$  v zraku. V primeru, ki ga bomo obravnavali zdaj, bo treba obenem upoštevati oba pojava, obenem pa pojav dodatno zaplete še dejstvo, da imamo opravka z dvema plastema, ki različno absorbirata visokoenergijske fotone – beton in jeklo.

Že v 4. poglavju smo spoznali dva parametra, ki opisujeta pojemanje sevanja zaradi absorpcije: linearni oslabitveni koeficient  $\mu$  in razpolovno debelino HVL. Vsi spodnji zapisi za eksponentno pojemanje intenzitete sevanja so enakovredni:

$$I = I_0 e^{-\mu z} = I_0 e^{-z/\zeta}, \quad (6.1)$$

$$I = I_0 2^{-z/z_{1/2}} = I_0 2^{-z/\text{HVL}}, \quad (6.2)$$

$$I = I_0 10^{-z/z_{1/10}} = I_0 10^{-z/\text{TVL}}. \quad (6.3)$$

Poleg že znane kratice HVL smo vpeljali še kratico TVL (angl. tenth-value layer), torej debelino, v kateri pade intenziteta sevanja na desetino.

Zvezo med različnimi parametri poiščemo tako, da v zgornjih enačbah logaritmiramo količnik  $I/I_0$ , in dobimo:

$$\mu = \frac{\ln 2}{\text{HVL}} = \frac{\ln 10}{\text{TVL}}.$$

### 6.1 Absorpcija v dvoplastnem sredstvu

Za začetek si olajšamo delo s tem, da za zdaj zanemarimo geometrijsko divergenco snopa (slika 6.1). Snop vzporednih žarkov z intenziteto  $I_0$  vpada pravokotno na absorber, ki je sestavljen iz dveh plasti: prva plast ima debelino  $d_1$  in je sestavljena iz snovi z linearnim oslabitvenim koeficientom  $\mu_1$ , druga pa ima debelino  $d_2$  in je sestavljena iz snovi z linearnim oslabitvenim koeficientom  $\mu_2$ . V našem primeru sta snovi beton in jeklo.

Enako kot v 4. poglavju znamo zapisati intenziteto sevanja v globini  $d_1$ :

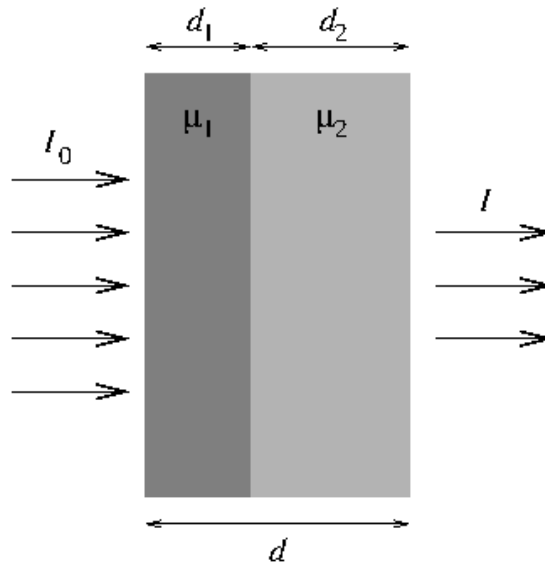
$$I(d_1) = I_0 e^{-\mu_1 d_1}. \quad (6.4)$$

Enako lahko zapišemo tudi za drugo plast, torej za intenziteto sevanja v globini  $d$ , le da je tu “vstopni” tok tisti, ki je že prišel skozi prvo plast:

$$I(d) = I(d_1) e^{-\mu_2 d_2}. \quad (6.5)$$

Sevanje, prepuščeno skozi obe plasti, bi radi izrazili z intenziteto vstopnega sevanja  $I_0$ , zato





Slika 6.1: Absorpcija v dvoplastnem sredstvu.

izraz (6.4) vstavimo v (6.5), pa imamo:

$$\begin{aligned}
 I(d) &= I_0 e^{-\mu_1 d_1} e^{-\mu_2 d_2} \\
 &= I_0 e^{-\mu_1 d_1 - \mu_2 d_2} \\
 &= I_0 e^{-\mu_1 d_1 - \mu_2 (d - d_1)}
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

V zadnjem koraku smo debelino enega od sredstev ( $d_2$ ) izrazili s skupno debelino  $d$  in debelino drugega sredstva ( $d_1$ ).

Če poznamo linearna oslabitvena koeficienta  $\mu_1$  in  $\mu_2$  in znamo izmeriti vstopni tok  $I_0$ , prepušteni tok  $I(d)$  in skupno debelino  $d$ , lahko iz enačbe (6.6) izračunamo debelino  $d_1$  (in potem seveda tudi  $d_2$ ):

$$\ln \left( \frac{I_0}{I} \right) = (\mu_1 - \mu_2) d_1 + \mu_2 d.$$

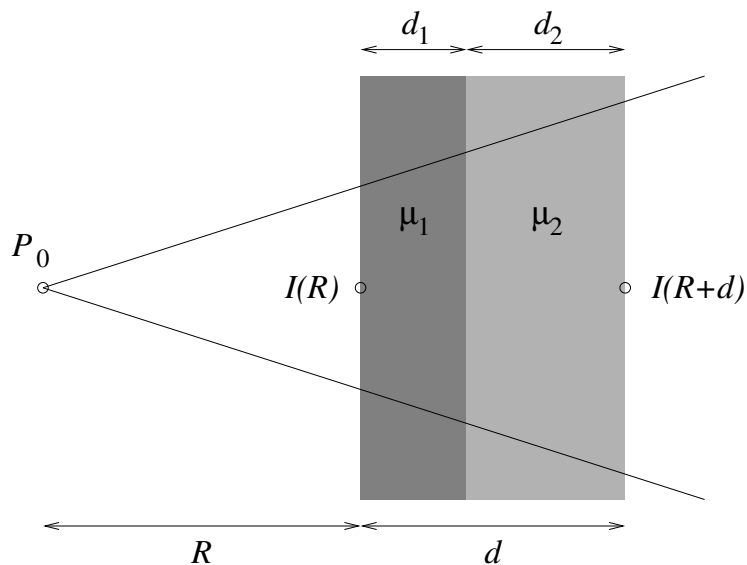
## 6.2 Absorpcija divergentnega snopa

Slika 6.2 shematično prikazuje fotonski snop in zaščito, sestavljeno iz betonskega zidu in kovinske plošče. Absorpcijo fotonskega snopa v zraku zanemarimo; do razdalje  $R$  gostota toka fotonov pada zgolj zaradi divergence:

$$I(R) = \frac{P_0}{4\pi R^2}. \tag{6.7}$$

Vrednosti  $P_0$  v izvoru ne poznamo, lahko pa jo izračunamo, če poznamo vrednost gostote toka fotonov  $I$  v izocentru ( $R_0 = 100$  cm):

$$I(R_0) = \frac{P_0}{4\pi R_0^2}. \tag{6.8}$$



Slika 6.2: Absorpcija divergentnega snopa v dvoplastnem sredstvu.

Če na poti ne bi bilo ovir, bi lahko tudi na razdali  $R + d$  zapisali:

$$I(R + d) = \frac{P_0}{4\pi(R + d)^2} = \frac{R_0^2}{(R + d)^2} I(R_0). \quad (6.9)$$

Če upoštevamo še absorpcijo v obeh sredstvih:

$$I(R + d) = \frac{R_0^2}{(R + d)^2} I(R_0) e^{-\mu_1 d_1 - \mu_2 d_2}. \quad (6.10)$$

Enako kot zgoraj lahko izrazimo debelino  $d_2$  kot razliko  $d - d_1$  ter izraz (6.10) preoblikujemo tako, da lahko iz njega izrazimo  $d_1$ :

$$\ln \left( \frac{I(R + d)}{I(R_0)} \cdot \frac{(R + d)^2}{R_0^2} \right) = -(\mu_1 - \mu_2)d_1 - \mu_2 d. \quad (6.11)$$

Še nismo pri koncu. Dosedanje izvajanje predpostavlja, da je linearni oslabitveni koeficient  $\mu$  konstanta. V resnici je  $\mu$  odvisen tako od snovi kot tudi od energijskega spektra sevanja, ki se absorbira v snovi. S prvo zahtevo ni težav – snov ostaja nespremenjena – z drugo pa imamo majhno zadrego. Dobro bi veljala za monokromatsko sevanje, slabše pa za fotonski snop z zveznim spektrom, ki ga seva linearni pospeševalnik. Gostota toka fotonov v snopu z globino nasploh pojema, vendar ne povsem enako za vse energije žarkov. Gostota toka fotonov z nižjo energijo pojema z globino hitreje kot gostota toka fotonov z višjo energijo. Z večjo globino narašča relativni delež spektra z višjimi energijami, ali, z drugimi besedami, spekter postaja “trši”. Linearni atenuacijski koeficient  $\mu$  torej z globino narašča, razpolovna debelina HVL in debelina TVL pa padata.

Odvisnost  $\mu$  od globine se najbolj pozna pri manjših globinah, potem pa čedalje manj. V preprostem približku lahko za absorpcijo fotonov z nominalno energijo 15 MV v betonu vzamemo  $\text{TVL}_{B(1)} = 44$  cm za prvo globino TVL in  $\text{TVL}_{B(e)} = 41$  cm za vse naslednje globine TVL (NCRP, 2005, tabela B.2). Zgornji model bi lahko torej dopolnili tako, da bi obravnavali prvih 44 cm betona kot ločeno plast z drugačnim linearnim atenuacijskim koeficientom kot preostanek betonske plasti.

## 7 Mehanski izocenter

Izocenter je točka v prostoru, okoli katere se vrtijo komponente medicinskega linearnega pospeševalnika. Roka obsevalnega aparata se vrtili okoli vodoravne osi, ki se seka z navpično osjo vrtenja obsevalne mize. Skozi to presečišče – izocenter – poteka tudi os vrtenja kolimatorja. Nadalje želimo tudi, da se z izocentrom ujema središče optičnega polja, sistem sobnih laserjev za nastavitev bolnika, in vsi slikovni sistemi (npr. naprava za elektronsko portalno slikanje, naprave za kilovoltno slikanje).

Zaradi različnih neželenih pojavov izocenter v praksi ni točkast, ampak malenkostno razmazan. Tak pojav je denimo povsod roke obsevalnega aparata pod svojo težo, zaradi česar se žarek pomakne malenkostno proti ležaju roke obsevalnega aparata, ko je ta v zgornji legi, in malenkostno stran od ležaja roke obsevalnega aparata (oziroma proti mizi), ko je roka obsevalnega aparata v spodnji legi. Tudi primeri, ko os vrtenja kolimatorja ne prebada presečišča osi vrtenja mize in roke obsevalnega aparata, ali ko sta osi vrtenja mize in roke obsevalnega aparata mimobežni, vodijo k razmazanju izocentra. Kolikšno razmazanje dopustimo, je odvisno tudi od namena uporabe linearnega pospeševalnika – najbolj strogi smo pri tistih, ki se uporabljajo za stereotaktično obsevanje.

Povsem mehansko določanje izocentra zahteva montažo dveh kalibriranih nosilcev: prvega pritrdimo na obsevalno mizo, drugega pa na obsevalno glavo (Tsai *in sod.*, 1996). Nosilca pri gornji poziciji roke obsevalnega aparata uravnamo tako, da se nosilca ravno dotikata, potem pa opazujemo, ali dotik nosilcev ostaja enak ob vrtenju roke obsevalnega aparata, obsevalne mize ali kolimatorja.

Povsem mehansko določanje izocentra je sicer morda konceptualno najbolj jasno, je pa zahtevno tako za izvedbo kot tudi za vrednotenje rezultatov. Namesto tega se pogosteje uporablja posredno merjenje z uporabo optičnega nastavitvenega podsistema, kar je tudi metoda, uporabljena pri teh vajah (Casar, 2015). Ob tem je seveda treba zagotoviti, da se izocenter optičnega podsistema ujema z mehanskim izocentrom (kar pa ni predmet teh vaj).

## 8 Sevalni izocenter

V prejšnjem poglavju smo se ukvarjali z mehanskim izocentrom in nadomestkom zanj, optičnim izocentrom. Optični izocenter je pomemben, ker z optičnim izocentrom nastavljammo bolnike. Ko je bolnik nastavljen, pa ni več pomemben optični izocenter, ampak sevalni: to je namreč točka, v kateri se sekajo centralne osi snopov iz različnih smeri. Tudi za sevalni izocenter želimo, da je čim manj razmazan in da čim bolj sovpada z mehanskim izocentrom.

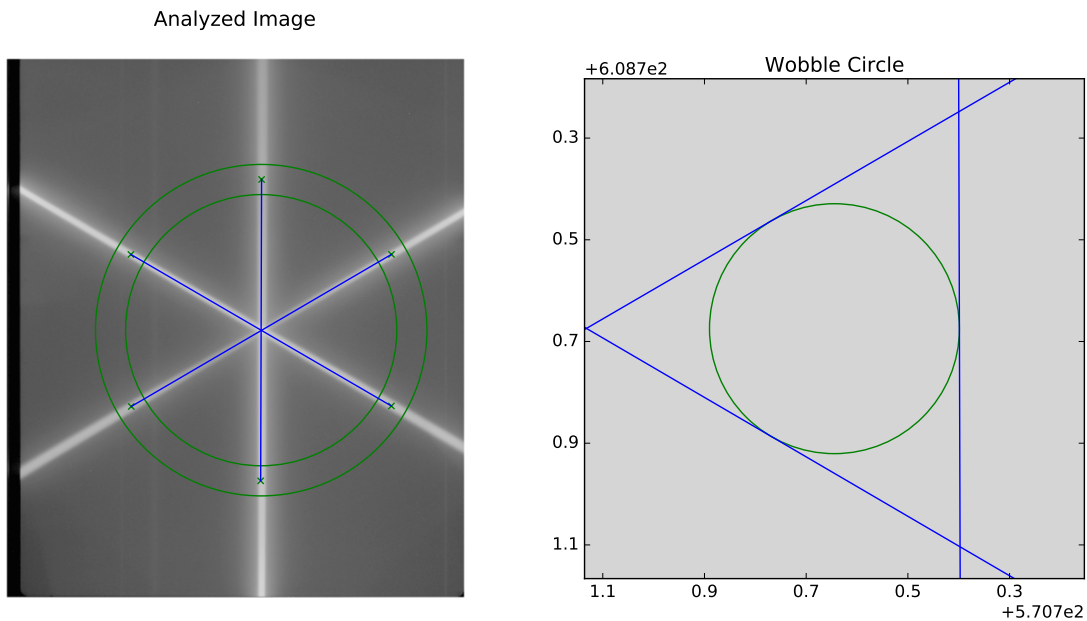
Pri sevalnem izocentru je mogoče celo zmanjšati nekatere pojave, ki vodijo k razmazanju izocentra. Poves roke obsevalnega aparata je pojav, ki se ga je praktično nemogoče znebiti, in zato vedno vodi k razmazanju mehanskega izocentra v longitudinalni smeri. Po drugi strani pa je pojav zelo regularen in ponovljiv, zato ga je mogoče zmanjšati s preciznim krmiljenjem elektronskega žarka, ki ga uporabljamo za produkcijo visokoenergijskih fotonov.

Morda najbolj znan test za preverjanje položaja sevalnega izocentra je Winston-Lutzov test (Lutz *in sod.*, 1988). V svoji prvotni izvedbi test obsega postavitev jeklene kroglice v izocenter, nato pa na glavo obsevalnega aparata namestimo fiksni konusni kolimator okroglega preseka, ki se uporablja za stereotaktično obsevanje in slikanje projekcije kroglice na radiokromni film. Premer konusnega kolimatorja je izbran tako, da je njegova projekcija v izocentru malo večja od premera kroglice, tako da je obsevan kolobar na filmu. Posnetek se ponovi pri različnih kotih zasuka roke obsevalnega aparata, mize in kolimatorja, iz širine obsevanega kolobarja v različnih smereh pa je mogoče sklepati na odstopanje osi zasuka. Pregled izvedenk Winston-Lutzevega testa je v članku Rowshanfarzad *in sod.* (2011).

Alternativni postopek, izvedljiv tudi na obsevalnih aparatih brez stereotaktičnih kolimatorjev, pa je obsevanje radiokromnega filma z ozko režo (Treurer *in sod.*, 2000). Če film obsevamo večkrat, pri čemer spreminjamo kot zasuka ene od komponent obsevalnika (roka obsevalnika, miza, kolimator), dobimo značilen zvezdast vzorec (slika 8.1).

Digitalizirano sliko filma računalniško obdelamo. Tu uporabljamo prosto dostopen program Pylinac (<https://pypi.python.org/pypi/pylinac>), na voljo pa je tudi več komercialnih rešitev. Postopek, ki ga uporabljajo, pa je bolj ali manj enak:

- Določi se približno središče zvezde: na mestu, kjer se križa več žarkov, je počrtnitev večja kot sicer (slika 8.1 je negativ počrtnitve).
- Določi se krožnica okoli približnega izhodišča, določenega v prejšnji točki, in izračuna profil počrtnitve vzdolž tega profila.
- Profil se analizira in na njem se poiščejo vrhovi, ki ustrezajo presečišču krožnice s počrtnitvijo zaradi žarka. Vrhov mora biti sodo mnogo, ker vsak žarek dvakrat seka krožnico.
- Poišče se, kateri par vrhov pripada istemu žarku, in določi se smerne koeficiente žarkov.
- Izračuna se radij kroga, včrtan v lik, ki ga oklepajo smerne premice žarkov.



Slika 8.1: Zvezdast vzorec, ki nastane ob obsevanju filma v koronarni ravnini pri treh različnih kotih zasuka roke obsevalnika, in analiza posnetka z modulom Starshot programa Pylinac.

- Radij je odvisen od izbire začetnega izhodišča; po gradientni metodi izberemo novo izhodišče in iterativno ponavljamo postopek od 2. koraka dalje za novo izhodišče. Kriterij za minimizacijo je čim manjši radij včrtanega kroga.
- Središče, h kateremu konvergira postopek, je optimizirano središče zvezde; polmer včrtanega kroga pri optimiziranem središču pa je merilo za opletanje izocentra.

Izvedemo tri meritve: prvič pri treh različnih kotih kolimatorja ( $120^\circ$  vsaksebi), drugič pri treh različnih kotih zasuka obsevalne mize in tretjič pri treh različnih kotih zasuka roke obsevalnega aparata.

## Literatura

- Andreo P, Burns DT, Kapsch RP, McEwen M, Vatnitsky S, Andersen CE, Ballester F, Borbinha J, Delaunay F, Francescon P, Hanlon MD, Mirzakhanian L, Muir B, Ojala J, Oliver CP, Pimpinella M, Pinto M, de Prez LA, Seuntjens J, Sommier L, Teles P, Tikkanen J, Vijande J, Zink K (2020). Determination of consensus  $k_Q$  values for megavoltage photon beams for the update of IAEA TRS-398. *Phys Med Biol* 65(9):095011.
- Anscombe FJ (1973). Graphs in statistical analysis. *Am Statist* 27(1):17–21.
- Bhat MR (1992). *Evaluated Nuclear Structure Data File (ENSDF)*. V: Qaim SM, ur. Nuclear Data for Science and Technology. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Casar B (2015). *Praktikum iz radioterapevtske fizike*. Ljubljana: Zdravstvena fakulteta.
- Castro P, García-Vicente F, Mínguez C, Floriano A, Sevillano D, Pérez L, Torres JJ (2008). Study of the uncertainty in the determination of the absorbed dose to water during external beam radiotherapy calibration. *J Appl Clin Med Phys* 9(1):70–86.
- IAEA (2000). *Absorbed dose determination in external beam radiotherapy: An international code of practice for dosimetry based on standards of absorbed dose to water*. Technical reports series no. 398. Vienna: International atomic energy agency.
- JCGM/WG1 (2008). *Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM 1995 with minor corrections)*. Sèvres: Bureau International des Poids et Mesures: Joint Committee for Guides in Metrology.
- Lutz W, Winston KR, Maleki N (1988). A system for stereotactic radiosurgery with a linear accelerator. *Int J Radiat Oncol Biol Phys* 14:373–381.
- NCRP (2005). *Structural shielding design and evaluation for megavoltage X- and gamma-ray radiotherapy facilities*. Report No. 151. Bethesda: National Council on Radiation Protection and Measurements.
- Rowshanfarzad P, Sabet M, O'Connor DJ, Greer PB (2011). Isocenter verification for linac-based stereotactic radiation therapy: review of principles and techniques. *J Appl Clin Med Phys* 12(4):185–195.
- Treuer H, Hoevens M, Luyken K, Gierich A, Kocher M, Müller RP, Sturm V (2000). On isocentre adjustment and quality control in linear accelerator based radiosurgery with circular collimators and room lasers. *Phys Med Biol* 45:2331–2341.
- Tsai JS, Curran BH, Sternick ES, Engler MJ (1996). The measurement of linear accelerator isocenter motion using a three-micrometer device and an adjustable motion pointer. *Int J Radiat Oncol Biol Phys* 34(1):189–195.